

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE DUA DENGAN METODE VARIASI PARAMETER

Aprilia Cristina Sianturi¹, Bali Sahputri Br. Tarigan², Cahaya Intan Pasaribu³, Tiara Febriyanti
br Panjaitan⁴, Yasmin Khairunisa⁵

^{1,2,3,4,5}Universitas Negeri Medan

Email: apriliasianturi100@gmail.com¹, balysahputritarigan@gmail.com²,
cahayaintan715@gmail.com³, febriantitiara065@gmail.com⁴, khairunisayasmin88@gmail.com⁵

Abstrak: Persamaan Diferensial Linier 2 memiliki banyak aplikasi dalam berbagai bidang sains dan teknik. Metode penyelesaian persamaan diferensial tak seragam adalah metode variasi parameter. Metode ini memungkinkan Anda menemukan solusi khusus melalui variasi konstanta solusi yang homogen. Artikel ini memberikan beberapa contoh konsep dasar, prosedur kelulusan, dan penggunaan variasi parameter saat menyelesaikan persamaan diferensial dengan orde linier.

Kata Kunci: Persamaan Diferensial, Metode Variasi Parameter, Solusi Khusus, Persamaan Linier Orde Kedua, Solusi Homogen.

Abstract: Linear Differential Equations 2 have many applications in various fields of science and engineering. The method of solving non-uniform differential equations is the parameter variation method. This method allows you to find a particular solution through varying the solution constants that are homogeneous. This article provides some examples of basic concepts, graduation procedures, and the use of parameter variation when solving differential equations with linear order.

Keywords: Differential Equations, Parameter Variation Method, Particular Solutions, Second Order Linear Equations, Homogeneous Solutions.

PENDAHULUAN

Matematika merupakan salah satu mata pelajaran dasar yang memiliki peran krusial dalam pengembangan kemampuan berpikir logis dan analitis siswa. Persamaan Diferensial (PD) adalah salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk menjelaskan masalah-masalah fisis. Masalah-masalah fisis tersebut dapat dimodelkan dalam bentuk PD. Pada perkembangan ilmu sekarang PD sebagai model banyak dijumpai dalam bidang-bidang sains, teknologi (teknik), biologi, ekonomi, ilmu sosial, demografi. PD digunakan sebagai alat untuk mengetahui kelakuan maupun sifat-sifat solusi masalah yang ditinjau. Karena itu, penting sekali mempelajari PD.

Persamaan diferensial adalah salah satu cabang paling penting dari matematika terapan, pemodelan fenomena alam seperti dinamika fluida, getaran mekanik, dan sistem listrik.

Secara umum, dua persamaan diferensial linier dapat diekspresikan dengan tepat dalam bentuk berikut:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

Dengan $p(x)$, $q(x)$, dan $g(x)$ merupakan fungsi kontinu pada interval tertentu. Jika $g(x) = 0$, maka persamaan tersebut disebut homogen, sedangkan jika $g(x) \neq 0$, maka disebut non-homogen. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan non-homogen adalah metode variasi parameter. Metode ini berbeda dengan metode koefisien tak tentu karena tidak terbatas pada bentuk khusus dari $g(x)$.

Seperti yang telah diketahui bahwa penyelesaian persamaan diferensial orde dua linear tak homogen koefisien konstan dengan syarat awal yang diberikan di dalam hampir semua kepustakaan selalu dilakukan dengan dua metoda, khususnya saat menentukan penyelesaian partikular. Kedua metoda tersebut adalah metoda koefisien tak tentu dan metoda variasi parameter, seperti yang dinyatakan dalam kepustakaan [1], [2], [3], [4], dan [5]. Operasi matematik pada kedua metoda tersebut melibatkan banyak operasi turunan, integral, dan aljabar matrik. Dalam artikel ini akan diperkenalkan suatu metoda yang berbeda dengan kedua metoda tersebut, khususnya bilamana persamaan diferensial yang diberikan memenuhi prinsip Duhamel (lihat [6] dan [7]). Penyelesaian matematis persamaan yang memenuhi prinsip tersebut dapat ditentukan melalui operasi konvolusi transformasi Laplace.

Persamaan diferensial adalah persamaan yang mengandung turunan, baik turunan biasa maupun turunan parsial. Dengan melibatkan banyaknya variabel bebas, maka ada dua bentuk persamaan diferensial yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Persamaan diferensial biasa yaitu persamaan yang hanya melibatkan satu variabel bebas, sedangkan persamaan diferensial parsial yaitu persamaan yang melibatkan lebih dari satu variabel bebas.

Persamaan diferensial linear orde-2 non homogen dengan koefisien konstan dapat diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu. Namun metode tidak umum strategi penyelesaian bergantung pada bentuk non homogen dari suatu persamaan diferensial, serta pada praktiknya tidak berlaku untuk semua persamaan diferensial non homogen. Selain metode koefisien tak tentu, untuk menyelesaikan persamaan diferensial non homogen orde-2 koefisien konstan dapat

digunakan metode variasi parameter, metode ini lebih umum daripada metode koefisien konstan akan tetapi pada metode variasi parameter tidak disebutkan mengenai syarat-syarat untuk masalah batas atau masalah nilai awal dari suatu persamaan diferensial [2]. Berdasarkan permasalahan dua metode tersebut maka munculah penyelesaian persamaan diferensial non homogen orde-2 koefisien konstan dengan menggunakan fungsi *Green*. Selain metode-metode tersebut juga terdapat metode lainnya.

METODE PENELITIAN

Studi ini menggunakan metode dan analisis matematika matematis. Studi literatur dilakukan dengan memeriksa berbagai referensi untuk persamaan diferensial linier dengan dua pesanan dan metode mengubah parameter dalam buku teks dan jurnal ilmiah. Analisis matematika dilakukan dengan menyajikan teori, persamaan, dan prosedur untuk menyelesaikan metode variasi parameter.

Selain itu, kami akan menggunakan beberapa contoh dari pertanyaan untuk menunjukkan cara menggunakan metode ini untuk menyelesaikan persamaan diferensial yang tidak seragam.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Metode variasi parameter didasarkan pada konsep mencari solusi khusus dalam bentuk:

$$yp = u_1(x)y_1 + u_2(x)y_2$$

Dengan y_1 dan y_2 merupakan solusi umum dari persamaan homogen terkait, dan $u_1(x)$ dan $u_2(x)$ adalah fungsi yang akan ditentukan. Untuk menemukan u_1 dan u_2 , kita menggunakan syarat tambahan:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \quad u_1'y_1' + u_2'y_2' = g(x)$$

Sistem persamaan ini dapat diselesaikan untuk menentukan u_1' dan u_2' , kemudian dengan mengintegrasikan hasilnya, kita memperoleh u_1 dan u_2 , yang akhirnya memberikan solusi khusus yp .

Sebagai contoh, kita selesaikan persamaan:

$$y'' - y = e^x$$

Solusi homogen dari persamaan $y'' - y = 0$ adalah $y_h = c_1e^x + c_2e^{-x}$.

Dengan metode variasi parameter, kita asumsikan solusi khusus dalam bentuk:

$$yp = u_1 e^x + u_2 e^{-x}.$$

Dengan menerapkan syarat tambahan dan menyelesaikan sistem persamaan, kita memperoleh solusi khusus dan akhirnya solusi umum dari persamaan diferensial.

Contoh:

Sebagai contoh, kita selesaikan persamaan:

$$y'' - y = e^x$$

Solusi homogen dari persamaan $y'' - y = 0$ adalah:

$$y_h = c_1 e^x + c_2 e^{-x}.$$

Dengan metode variasi parameter, kita asumsikan solusi khusus dalam bentuk:

$$yp = u_1 e^x + u_2 e^{-x}.$$

Substitusi ke dalam persamaan awal dan menggunakan syarat tambahan, kita mendapatkan:

$$u_1 e^x + u_2 e^{-x} = 0 \quad u_1' e^x + u_2' e^{-x} = e^x$$

Dari sistem ini, kita peroleh:

$$u_1' = \frac{1}{2} e^x, \quad u_2' = -\frac{1}{2} e^{-x}$$

Mengintegrasikan:

$$u_1 = \frac{1}{2} e^x, \quad u_2 = -\frac{1}{2} e^{-x}$$

Sehingga solusi khususnya:

$$yp = \frac{1}{2} e^x e^x - \frac{1}{2} e^{-x} e^{-x} - \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

Akhirnya, Solusi umum adalah:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} e^{-2x}$$

Keunggulan Metode Variasi Parameter

Metode variasi parameter memiliki beberapa keunggulan dibandingkan metode lain:

1. **Fleksibilitas:** Dapat digunakan untuk berbagai bentuk fungsi, termasuk polinomial, eksponensial, dan trigonometri.
2. **Keakuratan:** Hasil yang diperoleh adalah solusi eksak tanpa perlu asumsi tambahan.

3. **Generalisasi:** Dapat diperluas ke persamaan diferensial dengan orde lebih tinggi atau sistem persamaan diferensial.

KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan

Metode variasi parameter adalah teknik yang sangat berguna untuk menyelesaikan dua persamaan diferensial linier yang tidak seragam.

Keuntungan utama dari metode ini adalah fleksibilitasnya dalam menangani berbagai fitur fitur, membuatnya dapat digunakan dalam berbagai masalah di bidang fisika, teknik, dan bisnis.

Meskipun perhitungan mungkin lebih rumit daripada metode koefisien yang ditunjukkan, metode variasi parameter tetap menjadi pilihan utama dalam situasi di mana tidak ada metode lain yang tersedia.

Saran

Untuk lebih memahami cara memvariasikan parameter, kita perlu latihan dengan fungsi yang berbeda. Selain itu, mengembangkan perangkat lunak atau alat berbasis komputer dapat membantu Anda menyelesaikan perhitungan kompleks secara lebih efisien. Pengujian lebih lanjut dapat dilakukan untuk menyelidiki penerapan metode ini dalam kasus yang lebih kompleks. Seperti sistem Persamaan diferensial atau Persamaan Diferensial dengan koefisien variabel.

DAFTAR PUSTAKA

- Ellena, S. A. Y., Johansyah, M. D., & Napitupulu, H. (2023). Analisis Solusi Persamaan Diferensial Fraksional Riccati Menggunakan Metode Variasi Parameter Dan Metode Dekomposisi Kamal. In Search (Informatic, Science, Entrepreneur, Applied Art, Research, Humanism), 22(2), 271-280.
- Gunawan, G. (2021). Penerapan Konvolusi Pada Persamaan Diferensial Linier Orde Dua Tak Homogen Koefisien Konstan. BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika Dan Terapan, 15(3), 409-416.
- Lubis, T. A. (2025). Penerapan Metode Numerik Dalam Penyelesaian Persamaan Diferensial. Pentagon: Jurnal Matematika Dan Ilmu Pengetahuan Alam, 3(1), 131-137.

PERSAMAAN DIFERENSIASI BIASA DAN APLIKASINYA: Teori, Teknik, Dan Contoh

Soal. N.P., Stiletto Book, 2024.

Pratama, H. J., & Ramdani, Y. (2022). Membangun Fungsi Green Untuk Persamaan Diferensial Linear Non Homogen Orde-2 Koefesien Konstan. *Jurnal Riset Matematika*, 55-64.

Sihombing, S. C., & Dahlia, A. (2018). Penyelesaian Persamaan Diferensial Linier Orde Satu Dan Dua Disertai Nilai Awal Dengan Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Lima Butcher Dan Felhberg (RK45). *Jurnal Matematika Integratif*, 14(1), 51-60.

SUATU PENGANTAR PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA. N.P., Uwais Inspirasi Indonesia ,2023.